



第3章 平面向量

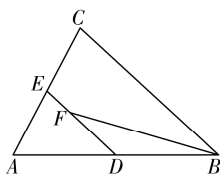
第1节 平面向量的线性运算、 平面向量基本定理及坐标运算



题型上分练

1. D 【解析】如图,依题意, $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,而 $\overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{FE}$,所以 $\overrightarrow{BF} =$

$$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}. \text{ 故选 D.}$$



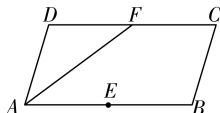
2. C 【解析】如图,在平行四边形 ABCD 中,由向量的减法法则得 $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD}$.

因为 $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$,所以 $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$.

因为 E 为线段 AB 的中点,所以 $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,由平行四边形的

性质得 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$,故 $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$,则 F 为线段 CD 的中点,故 C

正确.

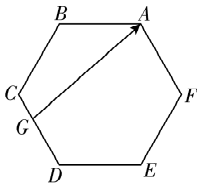


3. C 【解析】如图,依题意得 $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$,

因为 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CE}$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{GA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BA} = \frac{10}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{4}{3}\overrightarrow{CE}.$$

故选 C.



4. $\frac{2}{3}$ 【解析】因为 $6\overrightarrow{AP} + 5\overrightarrow{DA} = 4\overrightarrow{DC}$,则 $6\overrightarrow{AP} = 4\overrightarrow{DC} - 4\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DA} =$

$$4\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}, \text{ 所以 } \overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}.$$

$$\text{又 } \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} -$$



$$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}),$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}), \text{ 所以 } \frac{|\overrightarrow{MP}|}{|\overrightarrow{MN}|} = \frac{2}{3}.$$

5. A 【解析】 $2\overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{OB} + \lambda\overrightarrow{OC}$, 即 $\overrightarrow{OA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{OC}$, 因为点

A, B, C 是直线 l 上相异的三点, 则 A, B, C 三点共线, 则 $\frac{3}{2} +$

$\frac{\lambda}{2} = 1$, 解得 $\lambda = -1$. 故选 A.

6. C 【解析】已知向量 $x\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ 同向, 所以存在正实数 k 使得 $x\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 = k(\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2)$ (易错: 向量 $x\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ 同

向, 所以 k 为正数), 则 $\begin{cases} x=k, \\ 3=ky, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x=k, \\ y=\frac{3}{k}, \end{cases}$ 所以 $x+2y = k + \frac{6}{k} \geq$

$2\sqrt{k \cdot \frac{6}{k}} = 2\sqrt{6}$, 当且仅当 $k = \sqrt{6}$ 时取等号, 所以 $x+2y$ 的最

小值为 $2\sqrt{6}$. 故选 C.

7. B 【解析】若 A, B, C 三点共线, 则存在实数 k 满足 $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, 即 $\lambda_1\mathbf{a} + \mathbf{b} = k(\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b})$,

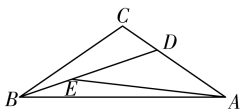
又因为向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 不共线, 所以 $\begin{cases} \lambda_1 = k, \\ 1 = k\lambda_2, \end{cases}$ 因此 $\lambda_1\lambda_2 = 1$.

8. C 【解析】如图, 因为 $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, 所以 $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = x(-\overrightarrow{AB}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} -$$

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} - \left(x + \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \left(x + \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB}.$$

因为 B, E, D 三点共线, 所以 $\frac{1}{2} - \left(x + \frac{1}{3}\right) = 1$, 解得 $x = -\frac{5}{6}$.



9. C 【解析】 $\because \overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{PN} (\lambda > 0), \therefore \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{BN} =$

$$\overrightarrow{AB} + \frac{\lambda}{\lambda+1}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN}) = \frac{\overrightarrow{AB}}{1+\lambda} + \frac{\lambda\overrightarrow{AN}}{1+\lambda}.$$

$$\because \overrightarrow{AN} = t\overrightarrow{NC} (t > 0), \therefore \overrightarrow{AN} = \frac{t}{t+1}\overrightarrow{AC},$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB}}{1+\lambda} + \frac{t\lambda}{(1+t)(1+\lambda)}\overrightarrow{AC}.$$

$$\because \overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$



$$\therefore \frac{1}{1+\lambda} = \frac{1}{4}, \frac{t\lambda}{(1+t)(1+\lambda)} = \frac{1}{2}, \text{解得 } \lambda=3, t=2, \text{故 } \lambda+t=5.$$

故选 C.

10. A 【解析】设 $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AD}$ ($0 < m < 1$), 则 $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BA} +$

$$m\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + m(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) = (1-m)\overrightarrow{BA} + \frac{m}{3}\overrightarrow{BC},$$

又因为 $\overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{BA} + \mu\overrightarrow{BC}$, 所以 $\lambda = 1-m, \mu = \frac{m}{3}$ (提示: 用同一

基底表示向量时, 对应的系数是唯一的), 所以 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} =$

$$\frac{1}{1-m} + \frac{3}{m} = \left(\frac{1}{1-m} + \frac{3}{m} \right) (1-m+m) = 1+3 + \frac{m}{1-m} + \frac{3(1-m)}{m} \geq$$

$$4+2\sqrt{\frac{m}{1-m} \cdot \frac{3(1-m)}{m}} = 4+2\sqrt{3}, \text{当且仅当 } \frac{m}{1-m} = \frac{3(1-m)}{m}, \text{即}$$

$$m = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \text{时, 等号成立, 所以 } \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \text{ 的最小值为 } 4+2\sqrt{3}. \text{ 故}$$

选 A.

11. D 【解析】对于 A, 因为 C, P, M 三点共线, 所以存在 λ 使

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AM} + (1-\lambda)\overrightarrow{AC} = \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AB} + (1-\lambda)\overrightarrow{AC}; \text{因为 } B, P, N \text{ 三点共}$$

$$\text{线, 所以存在 } \mu \text{ 使 } \overrightarrow{AP} = \mu\overrightarrow{AB} + (1-\mu)\overrightarrow{AN} = \mu\overrightarrow{AB} + \frac{1-\mu}{3}\overrightarrow{AC}, \text{则}$$

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{2} = \mu, \\ 1-\lambda = \frac{1-\mu}{3}, \end{cases} \text{解得 } \lambda = \frac{4}{5}, \mu = \frac{2}{5}, \text{因此 } \overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}, \text{故}$$

A 错误.

对于 B, 分析: 用同一组基底分别表示两个向量进行验证.

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = \left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} \right) - \overrightarrow{AB} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC},$$

$$\text{若 } \overrightarrow{BP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BN}, \text{则 } -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}) = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{15}\overrightarrow{AC}, \text{显然系数不相等, 故 B 错误.}$$

对于 C, 由于 $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AD}$, 且 D 在 BC 上, 故设 $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB} + (1-k)\overrightarrow{AC}$,

$$\text{则 } \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AD} = tk\overrightarrow{AB} + t(1-k)\overrightarrow{AC}, \text{结合 } \overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}, \text{得}$$

$$\begin{cases} tk = \frac{2}{5}, \\ t(1-k) = \frac{1}{5}, \end{cases} \text{解得 } t = \frac{3}{5}, \text{故 C 错误.}$$

$$\text{对于 D, } \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC} = \left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} \right) - \overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{4}{5}\overrightarrow{AC} =$$



$$\frac{2}{5}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})-\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{CB}, \text{故 D 正确. 故选 D.}$$

12. A 【解析】因为 $\mathbf{a}=(3,2)$, $\mathbf{b}=(0,-1)$, 所以 $\mathbf{a}-2\mathbf{b}=(3,2)-2(0,-1)=(3,4)$, $k\mathbf{a}-\mathbf{b}=(3k,2k)-(0,-1)=(3k,2k+1)$.

因为 $(\mathbf{a}-2\mathbf{b}) \perp (k\mathbf{a}-\mathbf{b})$, 所以 $(\mathbf{a}-2\mathbf{b}) \cdot (k\mathbf{a}-\mathbf{b})=0$,

$$\text{即 } 3 \times 3k + 4 \times (2k+1) = 0, \text{ 解得 } k = -\frac{4}{17}.$$

13. A 【解析】当 $a=-1$ 时, 向量 $\mathbf{m}=(-2,-6)$, $\mathbf{n}=(-1,-3)$, 则 $\mathbf{m}=2\mathbf{n}$, 即 $\mathbf{m} \parallel \mathbf{n}$, 故充分性成立;

当 $\mathbf{m} \parallel \mathbf{n}$ 时, 满足 $(a-1)(a-2)+1 \times (a-5)=0$, 即 $(a-3)(a+1)=0$, 解得 $a=3$ 或 $a=-1$, 所以必要性不成立.

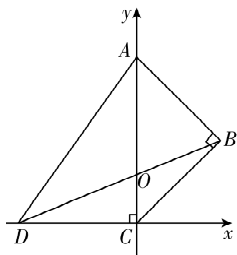
所以“ $a=-1$ ”是“ $\mathbf{m} \parallel \mathbf{n}$ ”的充分不必要条件.

14. C 【解析】由题意知 $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$C(x_3, y_3)$, 则 $\overrightarrow{FA}=\left(x_1-\frac{1}{2}, y_1\right)$, $\overrightarrow{FB}=\left(x_2-\frac{1}{2}, y_2\right)$, $\overrightarrow{FC}=\left(x_3-\frac{1}{2}, y_3\right)$.

因为 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\mathbf{0}$, 所以 $x_1-\frac{1}{2}+x_2-\frac{1}{2}+x_3-\frac{1}{2}=0$, 即 $x_1+x_2+x_3=\frac{3}{2}$, 所以 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=x_1+\frac{1}{2}+x_2+\frac{1}{2}+x_3+\frac{1}{2}=3$ (提示: 抛物线的定义). 故选 C.

15. A 【解析】以 C 为坐标原点, DC, CA 所在直线分别为 x, y 轴, 建立如图所示的平面直角坐标系 (提示: 坐标化是我们处理平面几何问题的重要方法).



由题意得 $AC=\sqrt{2}$, 则 $A(0, \sqrt{2})$, $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C(0, 0)$,

所以 $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{AC}=(0, -\sqrt{2})$.

因为 $BC=CD=1$, $\angle DCB=90^\circ+45^\circ=135^\circ$, 所以 $\angle BDC=\angle DBC=22.5^\circ$.

因为 $\tan 45^\circ=\frac{2 \tan 22.5^\circ}{1-\tan^2 22.5^\circ}=1$, 所以 $\tan 22.5^\circ=\sqrt{2}-1$,

所以 $OC=CD \cdot \tan 22.5^\circ=\sqrt{2}-1$, 故 $O(0, \sqrt{2}-1)$.

又 $D(-1, 0)$, 所以 $\overrightarrow{DO}=(1, \sqrt{2}-1)$.

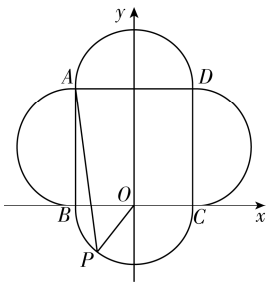
$$\text{因为 } \overrightarrow{DO}=\lambda \overrightarrow{AB}+\mu \overrightarrow{AC}, \text{ 所以 } \begin{cases} 1=\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda, \\ \sqrt{2}-1=-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda-\sqrt{2}\mu, \end{cases}$$



解得 $\begin{cases} \lambda = \sqrt{2}, \\ \mu = -1, \end{cases}$ 所以 $\lambda + \mu = \sqrt{2} - 1$. 故选 A.

16. -3 【解析】因为向量 $\mathbf{a} = (2, -1)$, $\mathbf{b} = (3, \lambda)$, $\mathbf{c} = (2, 4)$, 所以 $2\mathbf{a} - \mathbf{b} = (1, -2 - \lambda)$, $\mathbf{b} + 3\mathbf{c} = (9, \lambda + 12)$, 因为 $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$ 共线, 所以 $1 \times (\lambda + 12) = (-2 - \lambda) \times 9$, 解得 $\lambda = -3$.

17. $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$ 【解析】如图, 以 BC 的中点 O 为坐标原点, 线段 BC 所在直线为 x 轴, 线段 BC 的垂直平分线为 y 轴建立平面直角坐标系, 设 $P(\cos \theta, \sin \theta)$, $\theta \in [\pi, 2\pi]$ (关键: 坐标法解决和圆相关的问题时, 圆上的点设为三角形式), 则 $A(-1, 2)$, $B(-1, 0)$, $D(1, 2)$,



则 $\overrightarrow{AP} = (\cos \theta + 1, \sin \theta - 2)$, $\overrightarrow{AD} = (2, 0)$, $\overrightarrow{AB} = (0, -2)$.

由 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}$, 得 $(\cos \theta + 1, \sin \theta - 2) = \lambda(0, -2) + \mu(2, 0)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \cos \theta + 1 = 2\mu, \\ \sin \theta - 2 = -2\lambda, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} \mu = \frac{\cos \theta + 1}{2}, \\ \lambda = \frac{2 - \sin \theta}{2}, \end{cases}$$

所以 $\lambda + \mu = \frac{2 - \sin \theta}{2} + \frac{\cos \theta + 1}{2} = \frac{1}{2}(\cos \theta - \sin \theta + 3) =$

$\frac{1}{2} \left[\sqrt{2} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) + 3 \right]$ (提示: 辅助角公式).

因为 $\theta \in [\pi, 2\pi]$, 所以 $\theta + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4} \right]$, 所以当 $\theta + \frac{\pi}{4} =$

2π , 即 $\theta = \frac{7\pi}{4}$ 时, $\cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$ 取得最大值 1,

所以 $\lambda + \mu$ 的最大值为 $\frac{3 + \sqrt{2}}{2}$.



综合提分练

1. C 必刷考点 ①平面向量的线性运算

【解析】由题设 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 2(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA})$, 则 $3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB}$, 即

$3\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$, 则 $\overrightarrow{PA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. 又 $\overrightarrow{PA} = \lambda \overrightarrow{BC}$, 所以

$\lambda = -\frac{1}{3}$. 故选 C.

2. A 必刷考点 ②平面向量的坐标运算

【解析】如图, 以 A 为坐标原点, AB, AD 所在直线分别为 x ,



y 轴, 建立平面直角坐标系, 设 $AD=b, b>0, P(x, y), 0 \leq x \leq 3,$

$0 \leq y \leq b$, 则 $A(0, 0), B(2, 0), D(0, b),$

可得 $\overrightarrow{AB}=(2, 0), \overrightarrow{AD}=(0, b), \overrightarrow{AP}=(x, y),$

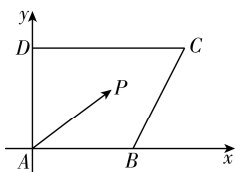
因为 $\overrightarrow{AP}=\lambda \overrightarrow{AB}+\mu \overrightarrow{AD}(\lambda, \mu \in \mathbf{R}),$

所以 $(x, y)=\lambda(2, 0)+\mu(0, b)=(2\lambda, b\mu),$

所以 $\lambda=\frac{x}{2}, \mu=\frac{y}{b}, \lambda+\mu=\frac{x}{2}+\frac{y}{b},$ 当 $x=y=0$ 时, $\lambda+\mu$ 取得最小值 0;

当 $x=3, y=b$ 时, $\lambda+\mu$ 取得最大值 $\frac{5}{2}$, 即 $\lambda+\mu \in \left[0, \frac{5}{2}\right]$. 故选

A.



3. D 必刷考点 ⊙平面向量的线性运算、向量共线定理的推论、基本不等式

【解析】 因为 G 为 OD 的中点, 所以 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$, 又 OD 是

$\triangle OAB$ 的中线, 即 D 为 AB 的中点, 所以 $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}),$

所以 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$. 由 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA},$

$\overrightarrow{OQ}=n\overrightarrow{OB}$, 其中 $m, n \in (0, 1]$, 得 $\overrightarrow{OA}=\frac{1}{m}\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OB}=\frac{1}{n}\overrightarrow{OQ}$, 所以

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4m}\overrightarrow{OP}+\frac{1}{4n}\overrightarrow{OQ}.$$

因为 G, P, Q 三点共线, 所以 $\frac{1}{4m}+\frac{1}{4n}=1$, 所以 $m+4n=$

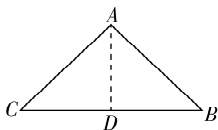
$$\left(\frac{1}{4m}+\frac{1}{4n}\right)(m+4n)=\frac{5}{4}+\frac{n}{m}+\frac{m}{4n} \geq \frac{5}{4}+2\sqrt{\frac{n}{m} \cdot \frac{m}{4n}}=\frac{9}{4},$$
 当

且仅当 $\frac{n}{m}=\frac{m}{4n}$, 即 $m=\frac{3}{4}, n=\frac{3}{8}$ 时等号成立, 所以 $m+4n$ 的

最小值为 $\frac{9}{4}$. 故选 D.

4. C 必刷考点 ⊙平面向量的坐标表示与运算

【解析】 如图①所示, 在直线 BC 上取一点 D , 使得 $\overrightarrow{BD}=\lambda \overrightarrow{BC},$



图①

所以 $\overrightarrow{AB}+\lambda \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$, 当 $AD \perp BC$ 时, $|\overrightarrow{AB}+\lambda \overrightarrow{BC}|$ 取得

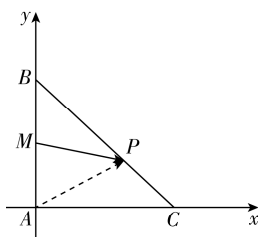
关键点

最小值 4, 即 $|\overrightarrow{AD}|=4$.



又 $AB=AC=4\sqrt{2}$, 所以 $\triangle ABC$ 是以 A 为顶点的等腰直角三角形.

以 A 为坐标原点, 建立如图②所示的平面直角坐标系,



图②

由 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ 可得 M 为线段 AB 的中点, 由 $\overrightarrow{AP} = \sin^2 \theta \cdot \overrightarrow{AB} + \cos^2 \theta \cdot \overrightarrow{AC}$, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, 可得 P, B, C 三点共线.

$A(0,0), B(0,4\sqrt{2}), C(4\sqrt{2},0), M(0,2\sqrt{2})$,

所以 $\overrightarrow{AB} = (0,4\sqrt{2}), \overrightarrow{AC} = (4\sqrt{2},0)$,

可得 $P(4\sqrt{2}\cos^2 \theta, 4\sqrt{2}\sin^2 \theta)$,

则 $\overrightarrow{MP} = (4\sqrt{2}\cos^2 \theta, 4\sqrt{2}\sin^2 \theta - 2\sqrt{2})$.

令 $\cos^2 \theta = t$, 由 $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, 可得 $t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$,

所以 $\overrightarrow{MP} = (4\sqrt{2}t, 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}t)$,

$|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{(4\sqrt{2}t)^2 + (2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}t)^2} = \sqrt{64t^2 - 32t + 8}$,

由二次函数 $y = 64t^2 - 32t + 8$ 在 $t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ 上单调递增, 可得

$|\overrightarrow{MP}|_{\max} = \sqrt{64 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 32 \times \frac{3}{4} + 8} = 2\sqrt{5}$. 故选 C.

5. $\frac{2}{5}$ 必刷考点 ⊙ 平面向量的线性运算、平面向量基本定理

【解析】因为 $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AF}$, 所以 $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} +$

$\frac{1}{4}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$. 设 $\overrightarrow{CE} = m\overrightarrow{CF} (0 < m < 1)$, 所以

$$\overrightarrow{CE} = \frac{3m}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{m}{4}\overrightarrow{CB}. \quad ①$$

因为 P 为 AC 的中点, 所以 $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CP}$.

设 $\overrightarrow{PE} = n\overrightarrow{PQ} (0 < n < 1)$, 又 $\overrightarrow{CB} = 4\overrightarrow{CQ}$, 所以 $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PE} = \overrightarrow{CP} +$

$$n\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{CP} + n(\overrightarrow{CQ} - \overrightarrow{CP}) = (1-n)\overrightarrow{CP} + n\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}(1-n)\overrightarrow{CA} + \frac{n}{4}\overrightarrow{CB}. \quad ②$$

$$\text{由①②可得} \begin{cases} \frac{3m}{4} = \frac{1}{2}(1-n), \\ \frac{m}{4} = \frac{n}{4}, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} m = \frac{2}{5}, \\ n = \frac{2}{5}, \end{cases}$$

所以 $\overrightarrow{CE} = \frac{3}{10}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{10}\overrightarrow{CB}$, 所以 $\lambda + \mu = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$.

6. 必刷考点 ⊙ 解三角形、向量共线定理的推论、平面向量基本定理、基本不等式

【解】(1) $\because a^2 + 4\sqrt{3}S = (b+c)^2, \therefore 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2}bc \sin A = b^2 + c^2 - a^2 +$



$$2bc, \therefore \sqrt{3} \sin A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + 1,$$

$$\therefore \text{由余弦定理得, } \sqrt{3} \sin A = \cos A + 1, \text{ 故 } \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{又 } A \in (0, \pi), \therefore A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \therefore A = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \text{ 由题意知 } \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}, \text{ 由 } D, M, C \text{ 三点共线, 可}$$

$$\text{设 } \overrightarrow{DM} = \lambda \overrightarrow{DC}, \text{ 即 } \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AC} - \lambda \overrightarrow{AD},$$

$$\text{故 } \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AC} + (1 - \lambda) \overrightarrow{AD}, \therefore \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AC} + \frac{1 - \lambda}{2} \overrightarrow{AB}.$$

$$\text{同理由 } B, M, E \text{ 三点共线, 可设 } \overrightarrow{AM} = \mu \overrightarrow{AE} + (1 - \mu) \overrightarrow{AB} = \frac{2\mu}{3} \overrightarrow{AC} +$$

$$(1 - \mu) \overrightarrow{AB},$$

$$\therefore \begin{cases} \lambda = \frac{2}{3} \mu, \\ \frac{1 - \lambda}{2} = 1 - \mu, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2}, \\ \mu = \frac{3}{4}, \end{cases}$$

$$\therefore \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}, \text{ 即 } \begin{cases} x = \frac{1}{4}, \\ y = \frac{1}{2}, \end{cases} \therefore x + y = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

$$(3) \text{ 方法一: 由重心定义得 } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),$$

$$\therefore \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AG} = -\frac{1}{12} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6} \overrightarrow{AC}.$$

$$\text{又 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin \angle BAC = \frac{\sqrt{3}}{4} bc = \sqrt{3}, \therefore bc = 4.$$

$$\therefore |\overrightarrow{GM}|^2 = \left(-\frac{1}{12} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6} \overrightarrow{AC}\right)^2 = \frac{c^2}{144} + \frac{b^2}{36} - \frac{bc}{36} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{c^2}{144} +$$

$$\frac{b^2}{36} - \frac{bc}{72} \geq 2 \sqrt{\frac{b^2 c^2}{144 \times 36}} - \frac{bc}{72} = \frac{bc}{72} = \frac{1}{18}, \text{ 当且仅当 } c = 2b \text{ 时等号}$$

$$\text{成立, } \therefore |\overrightarrow{GM}| \geq \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

$$\therefore \text{线段 } GM \text{ 的最小值为 } \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

$$\text{方法二: 由 (2) 得 } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}, \therefore \frac{1}{2} \overrightarrow{AM} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} =$$

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AM}, \text{ 即 } \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MD}, \text{ 故 } M \text{ 为 } CD \text{ 的中点.}$$

$$\text{又重心 } G \text{ 为 } DC \text{ 上靠近 } D \text{ 的三等分点, } \therefore GM = \frac{1}{6} CD.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin \angle BAC = \frac{\sqrt{3}}{4} bc = \sqrt{3}, \text{ 解得 } bc = 4,$$

$$\therefore \text{在 } \triangle ADC \text{ 中, } CD^2 = b^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2b \cdot \frac{c}{2} \cos \angle BAC = b^2 + \frac{c^2}{4} -$$

$$\frac{bc}{2} \geq 2 \sqrt{b^2 \cdot \frac{c^2}{4}} - \frac{bc}{2} = \frac{bc}{2} = 2, \text{ 当且仅当 } c = 2b \text{ 时取等号, 故}$$



$$CD \geq \sqrt{2}, \therefore GM = \frac{1}{6}CD \geq \frac{\sqrt{2}}{6}, \text{即线段 } GM \text{ 的最小值为 } \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

第2节 平面向量的数量积及其应用



题型上分练

1. D 【解析】 $(2a-b) \cdot a = 2a^2 - b \cdot a = 2|a|^2 - |b| \cdot |a| \cos 120^\circ =$

$$2 \times 2^2 - 5 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 13. \text{ 故选 D.}$$

2. C 【解析】由题意知 $\frac{OB}{OA} = \frac{BD}{AC} = \sqrt{2} - 1$,

$$\begin{aligned} \text{则 } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} &= (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = (-\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \overrightarrow{OA}^2 - \overrightarrow{OB}^2 = \overrightarrow{OA}^2 - (\sqrt{2} - 1)^2 \overrightarrow{OA}^2 = 2(\sqrt{2} - 1) \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AC}\right)^2 = \\ &= \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \overrightarrow{AC}^2, \text{ 所以 } \lambda = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}. \text{ 故选 C.} \end{aligned}$$

3. C 【解析】设 $M(x, y)$, 因为 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{MC}$, 所以 $(x, y - 3) =$

$$\frac{1}{2}(3 - x, -y), \text{ 解得 } \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \end{cases} \text{ 所以 } M(1, 2).$$

$$\text{又 } \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD} = (1, 2), \text{ 所以 } D(2, 4), \text{ 所以 } \overrightarrow{DC} = (1, -4), \overrightarrow{DA} = (-2, -1),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = (-2) \times 1 + (-1) \times (-4) = 2. \text{ 故选 C.}$$

4. D 【解析】由平面向量数量积的定义可得 $e_1 \cdot e_2 = |e_1| \cdot$

$$|e_2| \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \text{ 由题意可知 } \overrightarrow{OA} = 2e_1 + e_2, \overrightarrow{OB} = -4e_1 + 5e_2,$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (2e_1 + e_2) \cdot (-4e_1 + 5e_2) = -8e_1^2 + 6e_1 \cdot e_2 + 5e_2^2 = -8 + 3 + 5 = 0. \text{ 故选 D}$$

5. B 【解析】设 $P\left(t, t + \frac{1}{t}\right) (t > 0), A(m, m), O(0, 0)$, 则 $\overrightarrow{OA} =$

$$(m, m), \overrightarrow{PA} = \left(m - t, m - t - \frac{1}{t}\right), \text{ 由题意得 } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{PA} = 0, \text{ 即}$$

$$m(m - t) + m\left(m - t - \frac{1}{t}\right) = 0, \text{ 由几何关系易知 } m \neq 0, \text{ 故解得}$$

$$m = t + \frac{1}{2t} \text{ (提示: 利用题中的垂直关系找到参数之间的等量关}$$

$$\text{系)}, \text{ 所以 } A\left(t + \frac{1}{2t}, t + \frac{1}{2t}\right), \text{ 又 } B\left(0, t + \frac{1}{t}\right), \text{ 则 } \overrightarrow{PA} =$$

$$\left(\frac{1}{2t}, -\frac{1}{2t}\right), \overrightarrow{PB} = (-t, 0), \text{ 所以 } \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -t \times \frac{1}{2t} + 0 \times \left(-\frac{1}{2t}\right) =$$

$$-\frac{1}{2}. \text{ 故选 B.}$$

6. C 【解析】因为 $|ka - b| = \sqrt{2a \cdot b}$ (提示: 平面向量中, 遇到模想平方), 所以 $(ka - b)^2 = 2a \cdot b \geq 0$, 所以 $k^2|a|^2 - 2ka \cdot b + |b|^2 = 2a \cdot b$, 所以 $k^2|a|^2 + |b|^2 - (2k + 2)|a| \cdot |b| \cos \langle a, b \rangle = 0$, 由于 a, b 均为单位向量, 所以 $1 + k^2 = (2k + 2) \cos \langle a, b \rangle$, 所以



$\cos\langle a, b \rangle = \frac{1+k^2}{2(k+1)}$, 由于 $0 \leq \frac{1+k^2}{2(k+1)} \leq 1$ (提示: 已知一个等量关系求参数范围, 考虑等量关系中量的有界性), 解得 $1 - \sqrt{2} \leq k \leq 1 + \sqrt{2}$, 所以只有 C 符合. 故选 C.

7. B 【解析】因为在三个力 F_1, F_2, F_3 的作用下恰好处于平衡

关键点

状态, 所以 $F_1 + F_2 + F_3 = \mathbf{0}$, 设 $F_1 = (x, y)$, 根据向量的坐标运算, $F_1 + F_2 + F_3 = (x+2, y) = \mathbf{0}$, 所以 $x = -2, y = 0$, 所以 $F_1 = (-2, 0)$, 所以 $F_3 \cdot F_1 = 2, |F_1| = 2$, 所以 F_3 在 F_1 上的投影向量的坐标为 $\frac{F_3 \cdot F_1}{|F_1|^2} \cdot \frac{F_1}{|F_1|} = (-1, 0)$. 故选 B.

8. B 【解析】依题意, $b - 2a = (-2, -3)$,

所以 $(b - 2a) \cdot b = -2 \times 0 + (-3) \times (-1) = 3, |b| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$, 则 $(b - 2a)$ 在 b 上的投影向量为 $\frac{(b - 2a) \cdot b}{|b|} \cdot \frac{b}{|b|} = 3b = (0, -3)$. 故选 B.

9. A 【解析】由题得 $a \cdot b = 1 \times 1 \times \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, $a + \lambda b$ 在向量

a 上的投影向量为 $\frac{(a + \lambda b) \cdot a}{|a|^2} \cdot a = 2a$, 即 $\frac{(a + \lambda b) \cdot a}{|a|^2} = 2$, 即 $(a + \lambda b) \cdot a = |a|^2 + \lambda a \cdot b = 1 - \frac{1}{2}\lambda = 2$, 解得 $\lambda = -2$. 故选 A.

10. A 【解析】由题意得 $|a| = 2, |b| = 1$, b 在 a 上的投影向量

为 $\frac{b \cdot a}{|a|} \cdot \frac{a}{|a|} = -\frac{1}{3}a$, 故 $\frac{b \cdot a}{|a|^2} = -\frac{1}{3}$, 即 $\frac{|b| \cdot |a| \cos\langle a, b \rangle}{|a|^2} = -\frac{1}{3}$, $\frac{2 \cos\langle a, b \rangle}{2^2} = -\frac{1}{3}$, 解得 $\cos\langle a, b \rangle = -\frac{2}{3}$. 故选 A.

11. A 【解析】因为 A, F, D 三点共线, 所以设 $\overrightarrow{CF} = \lambda \overrightarrow{CA} + (1 - \lambda) \overrightarrow{CD} = \lambda \overrightarrow{CA} + (1 - \lambda) \times \frac{1}{2} \overrightarrow{CB}$,

又 B, F, E 三点共线, 所以 $\overrightarrow{CF} = \mu \overrightarrow{CE} + (1 - \mu) \overrightarrow{CB} = \frac{2\mu}{3} \overrightarrow{CA} + (1 -$

$\mu) \overrightarrow{CB}$, 所以 $\begin{cases} \lambda = \frac{2\mu}{3}, \\ \frac{1-\lambda}{2} = 1-\mu, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \lambda = \frac{1}{2}, \\ \mu = \frac{3}{4}, \end{cases}$ 所以 $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CA} +$

$\frac{1}{4} \overrightarrow{CB}$, 则 $\overrightarrow{CF}$ 在 $\overrightarrow{CB}$ 上的投影向量的模为 $\frac{|\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{CB}|} = \frac{1}{4} \times$

$\frac{|(2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{CB}|} = \frac{1}{4} \left(\frac{6}{|\overrightarrow{CB}|} + |\overrightarrow{CB}| \right) \geq \frac{1}{4} \times 2 \sqrt{|\overrightarrow{CB}| \times \frac{6}{|\overrightarrow{CB}|}} =$

$\frac{\sqrt{6}}{2}$, 当且仅当 $|\overrightarrow{CB}| = \frac{6}{|\overrightarrow{CB}|}$, 即 $|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{6}$ 时, 等号成立. 故选

A.

12. C 【解析】依题意, $a + b = (3, 1 + m)$. 由 $a \perp (a + b)$, 得 $a \cdot (a + b) = 0$, 即 $a \cdot (a + b) = 2 \times 3 + 1 \times (1 + m) = 6 + 1 + m = 7 + m = 0$, 解得 $m = -7$, 所以 $b = (1, -7)$.



所以 $|b| = \sqrt{1^2 + (-7)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. 故选 C.

13. A 【解析】因为 $a = (1, -\sqrt{3})$, 所以 $|a| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$.
 因为 $(3a-b) \perp a$, 所以 $(3a-b) \cdot a = 0$, 即 $3a^2 - a \cdot b = 0$, 所以
 $a \cdot b = 12$, 又 $|2a-b|^2 = 4a^2 - 4a \cdot b + b^2 = 16 - 48 + b^2 = 16$, 所以
 $b^2 = 48$, 所以 $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{12}{2 \times 4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 又 $\langle a, b \rangle \in$
 $[0, \pi]$, 所以 $\langle a, b \rangle = \frac{\pi}{6}$. 故选 A.

14. C 【解析】依题意 $(a-b) \cdot a = 0$, 则 $a \cdot b = a^2 = 1$, 所以 $|a-b| =$
 $\sqrt{a^2 - 2a \cdot b + b^2} = \sqrt{1^2 - 2 \times 1 + t^2 + (2-t)^2} = \sqrt{2(t-1)^2 + 1} \geq$
 1, 所以当 $t=1$ 时, $|a-b|$ 取得最小值, 且最小值为 1. 故选 C.

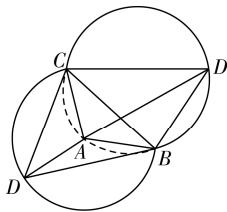
15. D 【解析】因为 a, b 均为单位向量, 所以 $a^2 = b^2 = 1$, 由 $|a+2b| < |3a-b|$, 得 $|a+2b|^2 < |3a-b|^2$, 则 $a^2 + 4a \cdot b + 4b^2 < 9a^2 -$
 $6a \cdot b + b^2$, 则 $1 + 4a \cdot b + 4 < 9 - 6a \cdot b + 1$, 即 $a \cdot b < \frac{1}{2}$, 则
 $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a||b|} < \frac{1}{2}$, 因为 $0 \leq \langle a, b \rangle \leq \pi$, 所以 $\frac{\pi}{3} < \langle a,$
 $b \rangle \leq \pi$. 则 a 与 b 的夹角的取值范围是 $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right]$. 故选 D.

16. $\frac{2\pi}{3}$ 4 【解析】 $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{-2}{2 \times 2} = -\frac{1}{2}$, 因为 $\langle a, b \rangle \in$
 $[0, \pi]$, 所以 a 与 b 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$.

设 $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AC} = b, \overrightarrow{AD} = c$, 则 $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}, \overrightarrow{CD} = c - b, \overrightarrow{BD} = c - a$,

因为 $c - a$ 与 $c - b$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 而 $\langle a, b \rangle = \frac{2\pi}{3}$, 故 D 在如图所

示的两段优弧 BC 上,



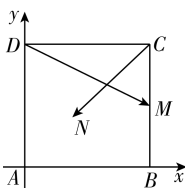
由余弦定理得 $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos \angle BAC = 12$, 解得

$BC = 2\sqrt{3}$, 所以右上方的弧所在圆的半径为 $\frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{\sin \angle BAC} =$

$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = 2$, 左下方的弧所在圆的半径为 2 且圆心为 A, 结

合图形可得 $|c|$ 的最大值为 4.

17. D 【解析】如图, 以 A 为坐标原点, $AB,$
 AD 所在直线分别为 x, y 轴, 建立平面直
 角坐标系, 则 $C(2, 2), D(0, 2), M(2,$
 1).





设 $N(m, n)$, $0 \leq m \leq 2, 0 \leq n \leq 2$, 则 $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{CN} = (2, -1) \cdot (m - 2, n - 2) = 2m - 4 + 2 - n = 2m - n - 2$,

故当 $m = 2, n = 0$ 时, $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{CN}$ 取得最大值, 最大值为 $4 - 0 - 2 = 2$. 故选 D.

18. D 【解析】设 $P(x, y)$, 因为点 A 的坐标为 $(-1, \sqrt{3})$, 所以

$$\overrightarrow{AO} = (1, -\sqrt{3}), \overrightarrow{AP} = (x+1, y-\sqrt{3}),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AP} = x+1-\sqrt{3}(y-\sqrt{3}) = x-\sqrt{3}y+4.$$

设 $t = x - \sqrt{3}y + 4$, 即 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}(4-t)$, 原问题可以转化为求

直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}(4-t)$ 与圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 有公共点时 t 的

范围, 即圆心 $(1, 0)$ 到直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}(4-t)$ 的距离 $d =$

$$\frac{|5-t|}{2} \leq 1, \text{ 解得 } 3 \leq t \leq 7. \text{ 故选 D.}$$

一题多解

(三角换元法) 设 $P(x, y)$, $\overrightarrow{BP}$ 与 x 轴正方向的

夹角为 θ (B 为圆的圆心), 则 $\begin{cases} x = 1 + \cos \theta, \\ y = \sin \theta, \end{cases} \theta \in [0, 2\pi)$, 则

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AP} = (1, -\sqrt{3}) \cdot (\cos \theta + 2, \sin \theta - \sqrt{3}) = \cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta +$$

$$5 = 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} + \theta \right) + 5 \in [3, 7]. \text{ 故选 D.}$$

19. C 【解析】设 $A\left(x_0, x_0 + \frac{1}{x_0}\right)$, 则 $\overrightarrow{OA} = \left(x_0, x_0 + \frac{1}{x_0}\right)$ (提示:

A, B, C 均为动点, 因此引入圆心 O , 以便表示各向量), 由题

意可得 $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC}$, 且 $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1$,

所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{AO} -$

$$\overrightarrow{OB}) = |\overrightarrow{AO}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2 = x_0^2 + \left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)^2 - 1 = 2x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + 1.$$

令 $t = x_0^2 > 0$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2t + \frac{1}{t} + 1 \geq 2\sqrt{2t \cdot \frac{1}{t}} + 1 = 2\sqrt{2} + 1$,

当且仅当 $2t = \frac{1}{t}$, 即 $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立. 故选 C.

20. -4 【解析】由题设, 如图有 $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CQ}$, 且 $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{2}$,

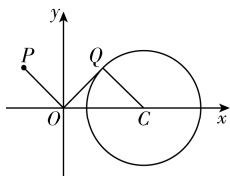
$|\overrightarrow{OC}| = 2, |\overrightarrow{CQ}| = \sqrt{2}, \angle POC = 135^\circ$, 所以 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} \cdot$

$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{CQ} = |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OC}| \cdot \cos 135^\circ + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{CQ} = -2 + \overrightarrow{OP} \cdot$

$\overrightarrow{CQ}$, 要使 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 最小, 只需 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{CQ}$ 反向共线, 此时 $\overrightarrow{OP} \cdot$

关键点

$\overrightarrow{CQ} = -2$, 所以 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 的最小值为 -4.





综合提分练

1. C 必刷题型 ⊙ 向量的模

【解析】由 $(a-b) \perp a$ 得 $(a-b) \cdot a = 0$, 即 $a^2 - a \cdot b = 0$, 即 $1 - a \cdot b = 0$, 所以 $a \cdot b = 1$, 所以 $|a-b| = \sqrt{(a-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2a \cdot b} = \sqrt{1+4-2 \times 1} = \sqrt{3}$ (提示: 遇模想平方, 可以先平方后开方). 故选 C.

2. BC 必刷知识 ⊙ 向量共线, 向量的数量积、夹角, 投影向量

【解析】由 $a+b=(m+1, m-3)$, $a-b=(m-1, 1-m)$, 得 $a=(m, -1)$, $b=(1, m-2)$.

对于 A, 判断是不是一定能作为一组基底, 关键在于两个向量能否共线, 由 $a \parallel b$, 得 $m^2 - 2m + 1 = 0$, 解得 $m = 1$, 此时 $a = b$, 不可以作为一组基底, A 错误.

对于 B, $a \cdot b = m - m + 2 = 2$, 故 $a \cdot b$ 为定值 2, B 正确.

对于 C, 当 $m = 3$ 时, $a = (3, -1)$, $b = (1, 1)$, 向量 a 在 b 上的投影向量为 $\frac{a \cdot b}{|b|^2} \cdot b = b = (1, 1)$, C 正确.

对于 D, 若向量 $a, a-b$ 的夹角为钝角, 则 $a \cdot (a-b) < 0$, 且 a 与 $a-b$ 不反向共线 (易错: 不共线这一条件易忽略), 所以 $m(m-1) - (1-m) < 0$, 且 $-(m-1) \neq m(1-m)$, 解得 $-1 < m < 1$, D 错误. 故选 BC.

3. B 必刷知识 ⊙ 平面向量的数量积、模

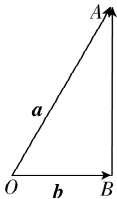
【解析】设 $a+b+c=\beta$, 则 $(a+c) \cdot (b+c) = (\beta-b) \cdot (\beta-a) = \beta^2 - (a+b) \cdot \beta + a \cdot b = 3 - (a+b) \cdot \beta$.

而 $|a+b| = \sqrt{(a+b)^2} = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + 2a \cdot b} = 2\sqrt{3}$, 因为 $(a+b) \cdot \beta \leq |a+b| \cdot |\beta|$, 所以 $(a+c) \cdot (b+c) \geq 3 - |a+b| |\beta| = 3 - 2\sqrt{3}$, 当且仅当 β 与 $a+b$ 同向时取等号. 故选 B.

4. D 必刷考点 ⊙ 平面向量的数量积、模及夹角

【解析】令 $a = \overrightarrow{OA}$, $b = \overrightarrow{OB}$, 则 $\overrightarrow{BA} = a - b$, 则由 $|a| = 2|b| = 8$ 及 $\langle a-b, a \rangle = \frac{\pi}{6}$ 可知, 在 $\triangle OAB$ 中,

$$\angle OAB = \frac{\pi}{6}, OA = 8, OB = 4.$$



由正弦定理得 $\frac{8}{\sin B} = \frac{4}{\sin \frac{\pi}{6}}$, 解得 $\sin B = 1$, 故 $\triangle OAB$ 为直角

三角形, 所以 $\langle a-b, b \rangle = \frac{\pi}{2}$, 即 $(a-b) \cdot b = 0$.

5. D 必刷题型 ⊙ 平面向量几何意义的应用

【解析】设 $P(x, y)$, 易知 $\overrightarrow{PA} = (-x, 1-y)$, $\overrightarrow{PB} = (2-x, 1-y)$.

由 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ 可得 $-x(2-x) + (1-y)^2 = 0$, 整理得 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, 即动点 P 的轨迹是以 $(1, 1)$ 为圆心, 1 为半径的圆.



又 $O(0,0)$, 所以 OP 的最大值为 $O(0,0)$ 到圆心 $(1,1)$ 的距离再加上半径, 即 $OP_{\max} = \sqrt{1^2+1^2}+1=\sqrt{2}+1$. 故选 D.

6. B 必刷知识 ① 投影向量、平面向量共线定理的推论

【解析】因为 $\overrightarrow{AO} = \lambda \overrightarrow{AB} + (1-\lambda) \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \lambda \overrightarrow{AC}$, 所以 $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AO} = \lambda \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{CA} = \lambda (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$, 即 $\overrightarrow{CO} = \lambda \overrightarrow{CB}$, 即 O 在 BC 上, 故

关键点

$\triangle ABC$ 的外接圆以 O 为圆心, BC 为直径, 所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 且 $AC \perp AB$, O 为 BC 的中点.

因为 $\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影向量为 $\frac{1}{5} \overrightarrow{BC}$, 所以 $|\overrightarrow{BA}| \cos B \cdot$

$\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{1}{5} \overrightarrow{BC}$, 即 $\frac{|\overrightarrow{BA}| \cos B}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{1}{5}$, 即 $\cos^2 B = \frac{1}{5}$. 又 B 为锐角,

所以 $\cos B = \frac{\sqrt{5}}{5}$ (另解: 过 A 作 $AD \perp BC$ 于 D (图略), 设 $BD =$

x , 则 $CD = 4x$, 由 $\triangle ABD \sim \triangle CBA$ 得 $AB = \sqrt{5}x$, 所以 $\cos B =$

$\frac{BD}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{5}$). 故选 B.

7. B 必刷考点 ① 平面向量基本定理的应用

【解析】因为 $\frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DA}}{|\overrightarrow{DA}|} = \frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{DB}|}$, 所以 $|\overrightarrow{DE}| \cos \angle EDA =$

关键点

$|\overrightarrow{DE}| \cos \angle EDB$, 即 $\cos \angle EDA = \cos \angle EDB$, 所以点 E 在 $\angle BDA$ 的平分线上.

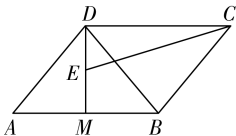
如图, 设 AB 的中点为 M , 因为 $DA = DB$, 所以点 E 在线段 DM 上, 不妨设 $\overrightarrow{DE} = \lambda \overrightarrow{DM}$, $\lambda \in [0, 1]$, 则 $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \lambda \overrightarrow{DM}$,

易知 $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{CD}$, 所以 $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \lambda \left(\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{CD} \right) =$

$\left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) \overrightarrow{CD} + \lambda \overrightarrow{CB}$.

又 $\overrightarrow{CE} = x \overrightarrow{CB} + y \overrightarrow{CD}$, 所以 $x + y = 1 - \frac{\lambda}{2} + \lambda = 1 + \frac{\lambda}{2}$. 因为 $\lambda \in [0,$

$1]$, 所以 $x + y = 1 + \frac{\lambda}{2} \in \left[1, \frac{3}{2} \right]$. 故选 B.



8. A 必刷题型 ① 平面向量数量积的最值问题

【解析】设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 由 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{QM} = 0$ 得 $(x_1 - 3)(x_2 -$

$3) + y_1 y_2 = 0$, 即 $y_1 y_2 = -(x_1 - 3)(x_2 - 3)$, 则 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{QP} = (x_1 - 3,$

$y_1) \cdot (x_1 - x_2, y_1 - y_2) = (x_1 - 3)(x_1 - x_2) + y_1(y_1 - y_2) = x_1^2 - x_1 x_2 -$

$3x_1 + 3x_2 + y_1^2 - y_1 y_2$, 代入 $y_1^2 = x_1^2 - 1$ 和 $y_1 y_2 = -(x_1 - 3)(x_2 - 3)$, 得

$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{QP} = 2x_1^2 - 6x_1 + 8$, 因为 P 在双曲线右支上, 所以 $x_1 \geq 1$.

易错点

设二次函数 $f(x) = 2x^2 - 6x + 8$, $x \geq 1$, 其图象的对称轴为直线



$x = \frac{3}{2} \geq 1$, 所以 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \times \frac{3}{2} + 8 = \frac{7}{2}$, 验证可知当 $x_1 = \frac{3}{2}$ 时, $y_1^2 = \frac{5}{4}$, 存在符合条件的 Q 在双曲线的右支上, 故最小值为 $\frac{7}{2}$. 故选 A.

真题风向练

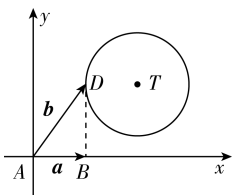
9.2 [1,3] 命题点 ④ 平面向量的线性运算

【解析】 因为 $a \cdot b = |a| |b| \cos \langle a, b \rangle = 1$, $|a| = 1$, 又 $|b| > 1$, 所以 a 与 b 不共线且 $|b| \cos \langle a, b \rangle = 1$, 所以 b 在 a 上的投影向量即为 a . 根据 $a + b - c = 0$, 可得 $c = a + b$, 即 $\lambda = 1, \mu = 1$, 故 $\lambda + \mu = 2$.

建立平面直角坐标系, 如图所示, 设 $a = \overrightarrow{AB}, b = \overrightarrow{AD}, c = \overrightarrow{AC}$, 易知 D 点在直线 $x = 1$ 上, 且 D 点与 B 点不重合, 设 $a + b = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AT}$, 由 $|a + b - c| = |\overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CT}| = 1$ 得 C 点在以 T 为圆心, 1 为半径的圆上. 易知 $B(1, 0)$, 设 $D(1, t) (t \neq 0)$, 则 $a = (1, 0), b = (1, t), T(2, t)$, 则 C 点在圆 $(x - 2)^2 + (y - t)^2 = 1$ 上. 设 $c = (2 + \cos \theta, t + \sin \theta)$, 由 $c = \lambda a + \mu b$ 得

$$\begin{cases} 2 + \cos \theta = \lambda + \mu, \\ t + \sin \theta = t\mu, \end{cases} \quad \text{则 } \sin \theta = t(\mu - 1), \text{ 因为当 } \mu = 1 \text{ 时, } \sin \theta = 0,$$

则 $\cos \theta = \pm 1$, 所以 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 2$, 即 $c = b$ 或 $c = 2a + b$, 符合题意, 此时 $\lambda + \mu = 1$ 或 $\lambda + \mu = 3$; 当 $\mu \neq 1$ 时, $t \in \mathbf{R}, t \neq 0$, 则 $t(\mu - 1) \neq 0$, 所以 $\sin \theta \in [-1, 0) \cup (0, 1]$, 则 $\cos \theta \in (-1, 1)$, 故 $\lambda + \mu \in (1, 3)$. 综上, $\lambda + \mu \in [1, 3]$.



一题多解 第二个空: 由 $|a + b - c| = 1, c = \lambda a + \mu b$ 可得 $|a + b - \lambda a - \mu b| = |(1 - \lambda)a + (1 - \mu)b| = 1$.

设 $\lambda + \mu = t, m = 1 - \lambda, n = 1 - \mu$, 则 $m + n = 2 - t$, 故上式可化为 $|ma + nb| = 1$, 则 $m^2 |a|^2 + 2mna \cdot b + n^2 |b|^2 = 1$, 即 $m^2 + 2mn + n^2 |b|^2 = 1$. 由 $n = 2 - t - m$, 令 $k = |b|^2, k > 1$, 则 $m^2 + 2m \cdot (2 - t - m) + (2 - t - m)^2 k = 1$, 整理得 $(k - 1)m^2 + 2(2 - t)(1 - k)m + (2 - t)^2 k - 1 = 0$ (提示: 展开化简时, 可将 $(2 - t)$ 看成整体), 将该方程看作关于 m 的一元二次方程, 该方程有实数解, 故 $\Delta = 4(2 - t)^2 (1 - k)^2 - 4(k - 1)[(2 - t)^2 k - 1] \geq 0$, 因为 $k > 1$, 所以 $k - 1 > 0$, 故 $(2 - t)^2 (k - 1) - (2 - t)^2 k + 1 \geq 0$, 即 $-(2 - t)^2 + 1 \geq 0$, 解得 $1 \leq t \leq 3$, 所以 $1 \leq \lambda + \mu \leq 3$.

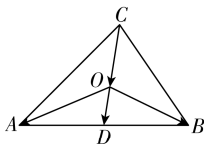


专题 平面向量的综合应用



题型上分练

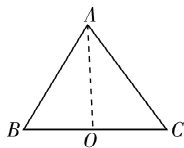
1. A 【解析】如图,因为点 O 为 $\triangle ABC$ 的重心,则 O 为 CD 的三等分点,且 $CO=2OD$,所以 $\vec{OA}+\vec{OB}=2\vec{OD}=\vec{CO}$. 故选 A.



2. A 【解析】 $\because \vec{BA} \cdot \vec{BD} = \vec{BC} \cdot \vec{BD}, \therefore \vec{BA} \cdot \vec{BD} - \vec{BC} \cdot \vec{BD} = 0,$
 $\therefore \vec{BD} \cdot (\vec{BA} - \vec{BC}) = 0, \therefore \vec{BD} \cdot \vec{CA} = 0, \therefore \vec{BD} \perp \vec{CA}, \therefore$ 直线 BD
 一定经过三角形 ABC 的垂心. 故选 A.

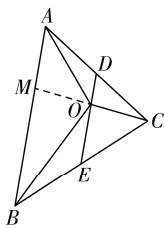
3. C 【解析】如图,设 BC 的中点是 O ,连接

$$OA, \text{ 则 } \vec{AC}^2 - \vec{AB}^2 = (\vec{AC} + \vec{AB}) \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = 2\vec{AO} \cdot \vec{BC} = 2\vec{AM} \cdot \vec{BC}, \text{ 即 } (\vec{AO} - \vec{AM}) \cdot \vec{BC} = \vec{MO} \cdot \vec{BC} = 0, \text{ 所以 } \vec{MO} \perp \vec{BC}.$$



所以动点 M 在线段 BC 的垂直平分线上,故动点 M 的轨迹必经过 $\triangle ABC$ 的外心. 故选 C.

4. D 【解析】如图,设 D, E 分别是 AC, BC 的中点. 因为 $2\vec{OA} + \vec{OB} + 3\vec{OC} = 2(\vec{OA} + \vec{OC}) + (\vec{OB} + \vec{OC}) = \vec{0}$, 所以 $4\vec{OD} + 2\vec{OE} = \vec{0}$, 即 $\vec{OE} = -2\vec{OD}$, 又 OD, OE 有公共点 O , 所以 O, D, E 三点共线. 延长 OC 交 AB 于点 M , 因为 $DE \parallel AB$, 且 $OE = 2OD$, 所以 $BM = 2AM$, 则 $S_{\triangle AMC} : S_{\triangle BMC} = 1 : 2, S_{\triangle AMO} : S_{\triangle BMO} = 1 : 2$, 所以 $S_{\triangle AOC} : S_{\triangle BOC} = 1 : 2$. 故选 D.



快解

由题知 $2\vec{OA} + \vec{OB} + 3\vec{OC} = \vec{0}$, 由奔驰定理易得 $S_{\triangle BOC} \cdot \vec{OA} + S_{\triangle AOC} \cdot \vec{OB} + S_{\triangle AOB} \cdot \vec{OC} = \vec{0}$, 故 $S_{\triangle AOC} : S_{\triangle BOC} = 1 : 2$. 故选 D.

5. BCD 【解析】对于 A, 由 P 为 $\triangle ABC$ 的重心, 得 $\vec{AP} = \frac{2}{3}\vec{AD} =$

$$\frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}), \text{ 则 } |\vec{AP}| = \frac{1}{3}\sqrt{\vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC}} =$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{2^2 + 3^2 + 2 \times 2 \times 3 \times \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{19}}{3} \text{ (提示: 重心是三条中线的交点), 故 A 错误.}$$

$$\text{对于 B, 由余弦定理得 } BC = \sqrt{2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \frac{1}{2}} = \sqrt{7}, \text{ 而 } P$$



为 $\triangle ABC$ 的外心(提示:外心是三条垂直平分线的交点,也是

三角形外接圆的圆心),由正弦定理得 $AP = \frac{BC}{2\sin \angle BAC} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} =$

$\frac{\sqrt{21}}{3}$,故 **B** 正确.

对于 C,由 P 为 $\triangle ABC$ 的垂心,得 AD 为 BC 边上的高(提示:

垂心是三条高线的交点),由等面积法得 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AD =$

$\frac{1}{2}AB \cdot AC \sin \angle BAC$, 则 $AD = \frac{2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{21}}{7}$, 故 **C** 正确.

对于 D,当 P 为 $\triangle ABC$ 的内心时(提示:内心是三条角平分线

的交点), AD 为 $\angle BAC$ 的平分线,故 $\angle BAD = \angle CAD = \frac{\pi}{6}$, 由

$S_{\triangle BAD} + S_{\triangle CAD} = S_{\triangle BAC}$, 可得 $\frac{1}{2} \times 2AD \times \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \times 3AD \times \sin \frac{\pi}{6} =$

$\frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \sin \frac{\pi}{3}$, 解得 $AD = \frac{6\sqrt{3}}{5}$, 故 **D** 正确. 故选 BCD.

6. D 【解析】由 $S_A \cdot \vec{OA} + S_B \cdot \vec{OB} + S_C \cdot \vec{OC} = \mathbf{0}$, $2\vec{OA} + 3\vec{OB} +$

$4\vec{OC} = \mathbf{0}$, 得 $S_A : S_B : S_C = 2 : 3 : 4$. 因为 O 是 $\triangle ABC$ 的内心,

所以 $S_A = \frac{r}{2} \cdot BC$, $S_B = \frac{r}{2}AC$, $S_C = \frac{r}{2}AB$, 故 $BC : AC : AB =$

$2 : 3 : 4$. 因为 $AB = 8$, 所以 $BC = 4$, $AC = 6$, 则 $\triangle ABC$ 的半周长 $p =$

9 , 由海伦公式得 $S_{\triangle ABC} = \sqrt{9 \times (9-8) \times (9-4) \times (9-6)} = 3\sqrt{15}$,

关键点

又 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(AB+BC+AC)r = pr = 9r$, 所以 $r = \frac{\sqrt{15}}{3}$, 由余弦定理

得 $\cos \angle ACB = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = -\frac{1}{4}$, 易知 $\angle ACB \in (0, \pi)$, 所以

$\sin \angle ACB = \frac{\sqrt{15}}{4}$. 由正弦定理得 $2R = \frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{8}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{32}{\sqrt{15}}$,

解得 $R = \frac{16\sqrt{15}}{15}$, 所以 $\frac{r}{R} = \frac{5}{16}$. 故选 D.

关键点拨 海伦公式: 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边

分别为 a, b, c , 则 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} =$

$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, 其中 $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

7. BC 【解析】设 $\vec{BD} = \lambda \vec{DC}$ ($0 < \lambda < 1$), 则 $\vec{AD} - \vec{AB} = \lambda(\vec{AC} - \vec{AD})$,

即 $\vec{AD} = \frac{1}{\lambda+1}\vec{AB} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\vec{AC}$. 又由 $\vec{AD} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$, 可得 $a+b=1$.

对于 A, 由 $0 < a < 1, 0 < b < 1$, 可得 $ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2 = \frac{1}{4}$, 当且仅

当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号, 故 **A** 错误.



对于 B, $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2 = \frac{1}{2}$, 当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号, 故 **B** 正确.

对于 C, $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)} = \sqrt{2}$, 当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号, 故 **C** 正确.

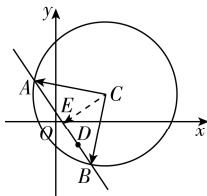
对于 D, 由 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \right) = \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} + 5 \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{4a}{b}} + 5 = 9$, 当且仅当 $a=\frac{1}{3}, b=\frac{2}{3}$ 时取等号, 故 **D** 错误. 故选 BC.

8. B 【解析】由 $C: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$ 可得 $C(2, 1)$, 半径 $r=3$.

3. 由 $(m+1)x + my - 1 = 0$ 可得 $m(x+y) + x - 1 = 0$, 令 $\begin{cases} x-1=0, \\ x+y=0, \end{cases}$ 解

得 $\begin{cases} x=1, \\ y=-1, \end{cases}$ 则直线 l 恒过定点 $D(1, -1)$, 故直线 l 与圆 C 相交

(提示: 过圆内一点的直线一定与圆相交). 取 AB 的中点 E , 连接 CE , 则 $CE \perp AB$, $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = (\vec{CE} + \vec{EA}) \cdot (\vec{CE} + \vec{EB}) = (\vec{CE} + \vec{EA}) \cdot (\vec{CE} - \vec{EA}) = \vec{CE}^2 - \vec{EA}^2 = |\vec{CE}|^2 - (|\vec{CA}|^2 - |\vec{CE}|^2) = 2|\vec{CE}|^2 - |\vec{CA}|^2 = 2|\vec{CE}|^2 - 9$, 要使数量积 $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$ 取得最大值, 则 $|\vec{CE}|$ 最大, 即点 $C(2, 1)$ 到直线 l 的距离最大, 当点 $D(1, -1)$ 与 E 重合, 即 $CD \perp AB$ 时, 点 C 到直线 l 的距离最大, 即 $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$ 最大, 所以 $(\vec{CA} \cdot \vec{CB})_{\max} = 2|\vec{CE}|_{\max}^2 - 9 = 2|\vec{CD}|^2 - 9 = 2[(2-1)^2 + (1+1)^2] - 9 = 1$. 故选 B.



9. C 【解析】 $\because E$ 为 AB 中点, $\therefore 2\vec{G_nE} = \vec{G_nA} + \vec{G_nB}$, $\therefore \vec{G_nB} = -\vec{G_nA} + 2\vec{G_nE}$,

又 $\because D, G_n, B$ 三点共线, $\therefore \vec{G_nD} = \lambda \vec{G_nB} = -\lambda \vec{G_nA} + 2\lambda \vec{G_nE} (\lambda < 0)$,

关键点

又 $\because \vec{G_nD} = a_{n+1}\vec{G_nA} - 2(2a_n + 3)\vec{G_nE}$, $\therefore \begin{cases} -\lambda = a_{n+1}, \\ 2\lambda = -2(2a_n + 3), \end{cases}$ 化简

可得 $a_{n+1} = 2a_n + 3$, $\therefore a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$, 又 $a_1 = 1, a_1 + 3 = 4$,

$\therefore$ 数列 $\{a_n + 3\}$ 是首项为 4, 公比为 2 的等比数列, 故 **B** 正确.

由 B 选项分析得 $a_n + 3 = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$, $\therefore a_n = 2^{n+1} - 3$, $\therefore a_3 = 13$, 故 **A** 正确, **C** 错误.

$S_n = \frac{4(1-2^n)}{1-2} - 3n = 2^{n+2} - 3n - 4$, 故 **D** 正确.

故选 C.

10. C 【解析】以 A 为坐标原点建立如图所示的平面直角坐标



系,由 $AB=4$, $BC=2\sqrt{2}$, $\angle BAD=\frac{\pi}{4}$, 得 $A(0,0)$, $B(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $D(2\sqrt{2}, 0)$.

因为 $|\overrightarrow{BP}|=1$, 所以点 P 在以 $B(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ 为圆心, 1 为半径的圆上.

设 $P(2\sqrt{2}+\cos \alpha, 2\sqrt{2}+\sin \alpha)$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, $Q(x, y)$,

因为 $2\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{QP}$, 所以 $2(x, y)=(2\sqrt{2}+\cos \alpha-x, 2\sqrt{2}+\sin \alpha-y)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} 2x=2\sqrt{2}+\cos \alpha-x, \\ 2y=2\sqrt{2}+\sin \alpha-y, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=\frac{2\sqrt{2}+\cos \alpha}{3}, \\ y=\frac{2\sqrt{2}+\sin \alpha}{3}, \end{cases}$$

$$\text{则 } Q\left(\frac{2\sqrt{2}+\cos \alpha}{3}, \frac{2\sqrt{2}+\sin \alpha}{3}\right),$$

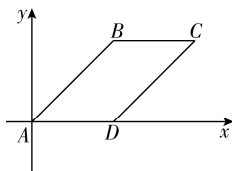
$$\text{所以 } \overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{DQ} = (\cos \alpha, 2\sqrt{2}+\sin \alpha) \cdot \left(\frac{\cos \alpha-4\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}+\sin \alpha}{3}\right)$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha - 4\sqrt{2} \cos \alpha}{3} + \frac{8 + \sin^2 \alpha + 4\sqrt{2} \sin \alpha}{3}$$

$$= \frac{9 - 4\sqrt{2} \cos \alpha + 4\sqrt{2} \sin \alpha}{3} = 3 + \frac{8}{3} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right),$$

当 $\alpha - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 即 $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ 时, $\overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{DQ}$ 取得最大值, 最大值为

$$3 + \frac{8}{3} = \frac{17}{3}.$$



11. A 【解析】由题可知, $a \perp b$.

如图所示, 不妨设 $a = \overrightarrow{OA} = (\sqrt{3}, 0)$, $b = \overrightarrow{OB} = (0, 1)$, $c = \overrightarrow{OC} = (m, n)$, $d = \overrightarrow{OD} = (p, q)$, 满足 $|a| = \sqrt{3}$, $|b| = 1$, $a \cdot b = 0$.

设 $A_1(-\sqrt{3}, 0)$, 由 $|c+a| + |c-a| = 4$, 得 $\sqrt{(m+\sqrt{3})^2 + n^2} + \sqrt{(m-\sqrt{3})^2 + n^2} = 4 = 2a > 2c = 2\sqrt{3} = |A_1A|$,

根据椭圆的定义可知, 点 C 在以 $A_1(-\sqrt{3}, 0)$, $A(\sqrt{3}, 0)$ 为焦点, 长轴长为 4 的椭圆上运动, $a = 2$, $c = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4 - 3} = 1$, 所以该椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

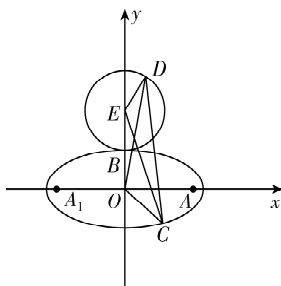
而 $d^2 - 4b \cdot d + 3 = 0$, 即 $p^2 + q^2 - 4q + 3 = 0$, 即 $p^2 + (q-2)^2 = 1$, 即点 D 在圆 $x^2 + (y-2)^2 = 1$ 上运动, 其中点 $E(0, 2)$ 为圆心, 半径 $r = 1$.

又 $|c-d| = |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}| = |CD| \leq |CE| + |ED| = |CE| + 1$ (提示: 三角形两边之和大于第三边), 当且仅当 C, D, E 三点共线时等号成立, 故只需求 $|CE|$ 的最大值即可.

因为点 C 在椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上运动, 所以不妨设 $C(2\cos \theta, \sin \theta)$,



$\sin \theta), \theta \in [0, 2\pi)$, 所以 $|CE| = \sqrt{4\cos^2\theta + (\sin\theta - 2)^2} = \sqrt{4(1 - \sin^2\theta) + \sin^2\theta - 4\sin\theta + 4} = \sqrt{-3\sin^2\theta - 4\sin\theta + 8}$, 所以当 $\sin\theta = -\frac{-4}{2 \times (-3)} = -\frac{2}{3}$, 且 C, D, E 三点共线 (E 在点 C, D 之间) 时, $|c - d|$ 有最大值 $|CE|_{\max} + 1 = \sqrt{-3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 8} + 1 = \frac{2\sqrt{21}}{3} + 1$. 故选 A.



12. 【解】(1) $\because 2ccos^2\frac{B}{2} + (b-2a)\cos C = c$,

$$\therefore c\left(2\cos^2\frac{B}{2} - 1\right) = (2a-b)\cos C,$$

$$\therefore c\cos B = (2a-b)\cos C,$$

$$\therefore \sin C\cos B = (2\sin A - \sin B)\cos C,$$

$$\therefore \sin C\cos B + \sin B\cos C = \sin A = 2\sin A\cos C.$$

$$\because A \in (0, \pi), \therefore \sin A \neq 0.$$

$$\therefore \cos C = \frac{1}{2}, \therefore C = \frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore \vec{AC} \cdot \vec{BC} = ab\cos C = 6, \therefore ab = 12,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = 3\sqrt{3}.$$

$$(2) \because \mathbf{m} = (5, \sqrt{3}), \mathbf{n} = (\sqrt{3}, \cos A), \text{ 且 } \mathbf{m} \parallel \mathbf{n},$$

$$\therefore 5\cos A - \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 0, \therefore \cos A = \frac{3}{5}, \sin A = \frac{4}{5}.$$

$$\because A+B = \frac{2\pi}{3}, \therefore \sin(B-A) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2A\right) = \sin\frac{2\pi}{3}\cos 2A -$$

$$\cos\frac{2\pi}{3}\sin 2A = \sqrt{3}\cos^2 A + \sin A\cos A - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{25} + \frac{12}{25} - \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$\frac{24-7\sqrt{3}}{50}.$$

13. 【解】(1) 由已知得 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \sin A \cdot \sin B = (\sin A + \sin C) \cdot (\sin A - \sin C) + \sin^2 B = \sin^2 A - \sin^2 C + \sin^2 B$,

$$\text{由正弦定理得 } a^2 + b^2 - c^2 = ab,$$

$$\text{由余弦定理得 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}.$$

$$\because C \in (0, \pi), \therefore C = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \because \vec{AD} = 2\vec{DB}, \therefore \vec{CD} = \frac{2}{3}\vec{CB} + \frac{1}{3}\vec{CA}, \vec{BD} = \frac{1}{3}(\vec{CA} - \vec{CB}),$$



$$\therefore |\overrightarrow{CD}|^2 = \overrightarrow{CD}^2 = \frac{1}{9}(4a^2 + 2ab + b^2), |\overrightarrow{DB}|^2 = \overrightarrow{BD}^2 = \frac{1}{9}(a^2 +$$

$$b^2 - ab), \frac{|\overrightarrow{CD}|^2}{|\overrightarrow{DB}|^2} = \frac{4a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2 - ab},$$

$$\text{设 } t = \frac{b}{a}, t > 0, \text{ 则 } \frac{|\overrightarrow{CD}|^2}{|\overrightarrow{DB}|^2} = \frac{4 + 2t + t^2}{t^2 - t + 1}.$$

$$\text{设 } f(t) = \frac{4 + 2t + t^2}{t^2 - t + 1} (t > 0), \text{ 则 } f'(t) = -3 \cdot \frac{-2 + 2t + t^2}{(t^2 - t + 1)^2}, \therefore f(t) \text{ 在}$$

$(0, -1 + \sqrt{3})$ 上单调递增, 在 $(-1 + \sqrt{3}, +\infty)$ 上单调递减,

$$f(t)_{\max} = f(-1 + \sqrt{3}) = 4 + 2\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})^2, \text{ 故 } \frac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{BD}|} \text{ 的最大值为}$$

$$1 + \sqrt{3}.$$

第3章 ▶ 真题综合测试

题组 1

1. A 命题点 ①平面向量基本定理

【解析】因为平面向量 a, b 不共线, 所以 a, b 可看作一个基底, 由平面向量基本定理可得对应系数相等, 即 $2 = x, y = -3$, 所以 $x = 2, y = -3$. 故选 A.

2. D 命题点 ②平面向量的数量积与向量垂直的关系

【解析】由题意知 $b - 4a = (2, x) - 4(0, 1) = (2, x - 4)$, 又 $b \perp (b - 4a)$, 所以 $2 \times 2 + x(x - 4) = 0$, 即 $x^2 - 4x + 4 = 0$, 解得 $x = 2$. 故选 D.

3. A 命题点 ③平面向量的线性运算

【解析】因为 D 是 AB 的中点, 所以 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$. 所以 $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}) = 2\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}$. 故选 A.

4. C 命题点 ④向量的数量积和模的运算

【解析】因为 $|a - 2b|^2 = (a - 2b)^2 = a^2 - 4a \cdot b + 4b^2 = 9$, 又 $a^2 = |a|^2 = 1, b^2 = |b|^2 = 3$, 所以 $4a \cdot b = 4$, 即 $a \cdot b = 1$. 故选 C.

方法速记 要善于利用“ $a^2 = |a|^2$ ”将“向量”的运算转化为“模”的运算; 也要注意向量加法、减法的几何意义的应用, 有时是非常奏效的.

5. C 命题点 ⑤平面向量运算的坐标表示、平面向量的夹角

【解析】由题意, 得 $c = a + tb = (3 + t, 4)$, 所以 $a \cdot c = 25 + 3t, b \cdot c = 3 + t$. 因为 $\langle a, c \rangle = \langle b, c \rangle$, 所以 $\cos \langle a, c \rangle = \cos \langle b, c \rangle$, 所以

关键点

$$\frac{a \cdot c}{|a||c|} = \frac{b \cdot c}{|b||c|}, \text{ 所以 } \frac{a \cdot c}{|a|} = \frac{b \cdot c}{|b|}, \text{ 即 } \frac{25 + 3t}{5} = 3 + t, \text{ 解得 } t = 5. \text{ 故选 C.}$$

6. C 命题点 ⑥向量的位置关系与坐标表示、充分必要条件

【解析】由题可得 $a = (x + 1, x), b = (x, 2), a \perp b$ 的充要条件为 $a \cdot b = 0$, 即 $(x + 1) \cdot x + 2x = 0$, 解得 $x = 0$ 或 $x = -3$, 故 A 错误, C 正确. $a \parallel b$ 的充要条件为 $2(x + 1) = x^2$, 即 $x^2 - 2x - 2 = 0$, 解得 $x = 1 \pm \sqrt{3}$, 故 B, D 错误. 故选 C.



7. ACD 必刷知识 ⊙ 向量共线、垂直的坐标表示, 向量的数量积公式与模

【解析】对于 A, 因为 $a \parallel b$, 所以 $4\cos \theta = -3\sin \theta$, 解得 $\tan \theta = -\frac{4}{3}$, 故 A 正确.

对于 B, 因为 $a \perp b$, 所以 $-3\cos \theta + 4\sin \theta = 0$. 又 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, 解得 $\sin \theta = \pm \frac{3}{5}$, 故 B 错误.

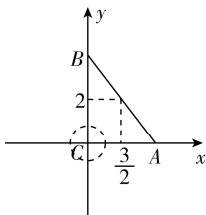
对于 C, $(a-b)^2 = a^2 - 2a \cdot b + b^2 = 1 + 6\cos \theta - 8\sin \theta + 25 = 26 - 10\sin(\theta - \varphi)$, 其中 $\cos \varphi = \frac{4}{5}$, $\sin \varphi = \frac{3}{5}$, 当 $\sin(\theta - \varphi) = -1$ 时, $|a-b|$ 有最大值 6, 故 C 正确.

对于 D, $a \cdot (a-b) = a^2 - a \cdot b = 0$, 所以 $a \cdot b = 1$, 则 $(a-b)^2 = a^2 - 2a \cdot b + b^2 = 1 - 2 + 25 = 24$, 解得 $|a-b| = 2\sqrt{6}$, 故 D 正确.

故选 ACD.

8. D 命题点 ⊙ 平面向量的数量积、圆上一点到定点的距离的范围

【解析】以 C 为坐标原点, CA, CB 所在直线分别为 x, y 轴建立平面直角坐标系, 如图所示, 则 $A(3, 0)$, $B(0, 4)$. 设 $P(x, y)$, 则 $x^2 + y^2 = 1$, $\overrightarrow{PA} = (3-x, -y)$, $\overrightarrow{PB} = (-x, 4-y)$, 所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = x^2 - 3x + y^2 - 4y =$



$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-2)^2 - \frac{25}{4}$. 因为 $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 +$

$(y-2)^2$ 表示为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上一点到点 $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 的距离的平方, 又圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上一点到点 $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 的距离的最值可由圆

心 $(0, 0)$ 到点 $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 的距离加(减)半径得到, 所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \in$

$\left[\left(\frac{5}{2}-1\right)^2 - \frac{25}{4}, \left(\frac{5}{2}+1\right)^2 - \frac{25}{4}\right]$, 即 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \in [-4, 6]$. 故选 D.

9. D 命题点 ⊙ 向量的线性运算、数量积

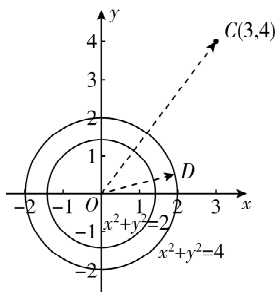
【解析】 $\because |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $\therefore |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = 4$, $\therefore OA \perp OB$ 且点 A, B 在以点 O 为圆心, $\sqrt{2}$ 为半径的圆上, $\therefore |2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}|$, $\therefore |2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}|^2 = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})^2 + 4\overrightarrow{OC}^2 - 4(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 4\overrightarrow{OC}^2 - 4(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC} = 104 - 4(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC}$.

令 $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, 则点 D 在以点 O 为圆心, 2 为半径的圆上, $\therefore (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OD}| |\overrightarrow{OC}| \cos \langle \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC} \rangle = 10 \cos \langle \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC} \rangle$.

$\because \langle \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC} \rangle \in [0, \pi]$, $\therefore (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC} \in [-10, 10]$,

$\therefore |2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}|^2 = 104 - 4(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC} \in [64, 144]$,

$\therefore |2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}| \in [8, 12]$. 故选 D.



10. $\frac{3}{5}$ 命题点 ① 向量的数量积与坐标运算

【解析】因为 $(a-\lambda b) \perp b$, 所以 $(a-\lambda b) \cdot b = [(1, 3) - (3\lambda, 4\lambda)] \cdot (3, 4) = 0$, 整理得 $15 - 25\lambda = 0$, 解得 $\lambda = \frac{3}{5}$.

一题多解 由 $(a-\lambda b) \perp b$ 得 $(a-\lambda b) \cdot b = 0$, 则 $a \cdot b - \lambda b^2 = 0$, 则 $\lambda = \frac{a \cdot b}{b^2} = \frac{(1, 3) \cdot (3, 4)}{3^2 + 4^2} = \frac{3}{5}$.

11. $\sqrt{3}$ 命题点 ② 平面向量的数量积及模长计算

【解析】 $\begin{cases} |a-b| = \sqrt{3}, \\ |a+b| = |2a-b|, \end{cases}$ 两式分别平方, 得

$$\begin{cases} |a|^2 - 2a \cdot b + |b|^2 = 3, \\ |a|^2 + 2a \cdot b + |b|^2 = 4|a|^2 - 4a \cdot b + |b|^2, \end{cases} \quad \text{解得 } |b| = \sqrt{3}.$$

12. $\frac{1}{6}a + \frac{2}{3}b$ -15 命题点 ③ 平面向量的线性运算、平面向量的数量积

【解析】依题意, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = b + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$, 因为 D 是 AB 中点,

所以 $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a - b$, 所以 $\overrightarrow{AE} = b + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a - b\right) = \frac{1}{6}a + \frac{2}{3}b$.

方法一: 因为 $|\overrightarrow{AE}| = 5$, $AE \perp CB$, 所以

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{6}a + \frac{2}{3}b\right)^2 = 25, \\ \left(\frac{1}{6}a + \frac{2}{3}b\right) \cdot (a-b) = 0, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} \frac{1}{36}|a|^2 + \frac{2}{9}a \cdot b + \frac{4}{9}|b|^2 = 25, \\ \frac{1}{6}|a|^2 + \frac{1}{2}a \cdot b - \frac{2}{3}|b|^2 = 0, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} |a|^2 + 8a \cdot b + 16|b|^2 = 900, \text{①} \\ |a|^2 - 4|b|^2 + 3a \cdot b = 0, \text{②} \end{cases}$$

由②得 $|a|^2 = 4|b|^2 - 3a \cdot b$, 代入①得 $20|b|^2 + 5a \cdot b = 900$,

$$\begin{aligned} \text{则 } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CD} &= \left(\frac{1}{6}a + \frac{2}{3}b\right) \cdot \left(\frac{1}{2}a - b\right) = \frac{1}{12}|a|^2 + \frac{1}{6}a \cdot b - \frac{2}{3}|b|^2 \\ &= -\frac{1}{3}|b|^2 - \frac{1}{12}a \cdot b = -\frac{1}{60}(20|b|^2 + 5a \cdot b) = \end{aligned}$$



$$-\frac{900}{60} = -15.$$

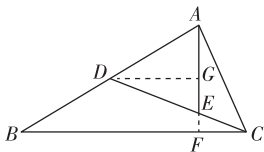
方法二:如图,延长 AE 交 BC 于 F , 则 $AF \perp BC$, 过 D 作 $DG \perp AF$ 于 G , 所以 $\triangle CEF \sim \triangle DEG$,

设 $EF = x$, 则 $\frac{EG}{EF} = \frac{DE}{EC} = \frac{2}{1}$, 所以 $EG = 2x$.

又 D 为 AB 中点, $DG \parallel BF$, 所以 $AG = FG = 3x$,

所以 $AE = AG + GE = 3x + 2x = 5$, 解得 $x = 1$, 即 $EF = 1$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \vec{AE} \cdot \vec{CD} &= \vec{AE} \cdot 3\vec{CE} = 3|\vec{AE}| \cdot |\vec{CE}| \cdot \cos \langle \vec{AE}, \vec{CE} \rangle = \\ &= 3|\vec{AE}| \cdot |\vec{CE}| \cdot (-\cos \angle CEF) = 3|\vec{AE}| \cdot |\vec{CE}| \cdot \left(-\frac{|\vec{EF}|}{|\vec{CE}|} \right) = -3|\vec{AE}| \cdot |\vec{EF}| = -15. \end{aligned}$$



方法三:延长 AE 交 BC 于 F , 则 $AF \perp BC$.

$$\begin{aligned} \vec{AE} \cdot \vec{CD} &= \vec{AE} \cdot (\vec{CB} + \vec{BD}) = \vec{AE} \cdot \vec{CB} + \vec{AE} \cdot \vec{BD} = 0 + \\ &= \vec{AE} \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{AB} \right) = -\frac{1}{2}\vec{AE} \cdot \vec{AB}. \end{aligned}$$

设 $\vec{AE}$ 与 $\vec{AB}$ 的夹角为 θ , 则 $\vec{AE} \cdot \vec{CD} = -\frac{1}{2}|\vec{AE}| \cdot |\vec{AB}| \cos \theta$

(提示: $|\vec{AB}| \cdot \cos \theta$ 即为 $\vec{AB}$ 在 $\vec{AE}$ 上的投影数量) $= -\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot |\vec{AF}|$.

$$\text{设 } \vec{AF} = \lambda \vec{AE} = \lambda \left(\frac{2}{3}\vec{AC} + \frac{1}{6}\vec{AB} \right) = \frac{2}{3}\lambda \vec{AC} + \frac{\lambda}{6}\vec{AB},$$

因为 B, F, C 三点共线, 所以 $\frac{2}{3}\lambda + \frac{\lambda}{6} = 1$, 解得 $\lambda = \frac{6}{5}$,

所以 $\vec{AF} = \frac{6}{5}\vec{AE}$, 即 $|\vec{AF}| = 6$,

$$\text{所以 } \vec{AE} \cdot \vec{CD} = -\frac{1}{2} \times 5 \times 6 = -15.$$

二级结论

在 $\triangle ABC$ 中, D 为线段 BC 上一点, 若 $\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}$, 则

$$\vec{AD} = \frac{m}{m+n} \cdot \vec{AC} + \frac{n}{m+n} \vec{AB}.$$

13. (1, $\sqrt{5}$) 命题点 ①求向量线性组合的模

【解析】因为 $f(a \cdot b) + f(b \cdot c) + f(c \cdot a) = 0$,

所以 $f(a \cdot b), f(b \cdot c), f(c \cdot a)$ 有 1 个为 0, 1 个为 1, 1 个为 -1, 或都为 0.

当 $f(a \cdot b) = f(b \cdot c) = f(c \cdot a) = 0$ 时, $a \cdot b = b \cdot c = c \cdot a = 0$, 即三个单位向量两两垂直, 又 a, b, c 是平面内的单位向量, 故不满足题意.

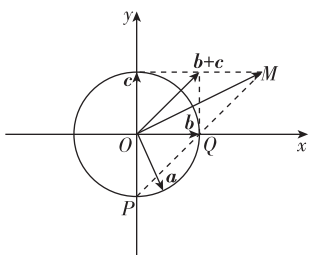
不妨令 $f(a \cdot b) = 1, f(b \cdot c) = 0, f(c \cdot a) = -1$, 即 $a \cdot b > 0, b \cdot c = 0, c \cdot a < 0$.



方法一: 设 $b = (1, 0)$, $c = (0, 1)$, $a = (\cos \theta, \sin \theta)$
 $\left(\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)\right)$, $a+b+c = (1+\cos \theta, 1+\sin \theta)$, 故 $|a+b+c|^2 =$
 $(1+\cos \theta)^2 + (1+\sin \theta)^2 = 3 + 2\cos \theta + 2\sin \theta = 3 +$
 $2\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$,

因为 $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, 所以 $\theta + \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, 所以
 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 所以 $3 + 2\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \in (1, 5)$,
 故 $|a+b+c|$ 的取值范围是 $(1, \sqrt{5})$.

方法二: 设 $b = (1, 0)$, $c =$
 $(0, 1)$, 在单位圆中作图如
 图所示, 将 a 的起点放在圆
 心 O 处, 则 a 的终点在弧
 PQ 上 (不包含 P, Q 两点),
 计算可得 $|OQ| = 1$, $|OM| =$



$\sqrt{5}$, 假设 a 的终点分别与 P, Q 重合, 此时 $|a+b+c|$ 取到临界
 值 $1, \sqrt{5}$, 故 $|a+b+c|$ 的取值范围是 $(1, \sqrt{5})$.

方法三: $|a+b+c|^2 = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2a \cdot b + 2a \cdot c + 2b \cdot$
 $c = 3 + 2a \cdot (b+c) = 3 + 2|a| \cdot |b+c| \cdot \cos \langle a, b+c \rangle$.

因为 $a \cdot b > 0$, 所以 $0 < \langle a, b \rangle < \frac{\pi}{2}$, 则 $\frac{\pi}{4} < \langle a, b+c \rangle < \frac{3\pi}{4}$, 故

$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos \langle a, b+c \rangle < \frac{\sqrt{2}}{2}$, 又 $b \cdot c = 0$, 所以 $b \perp c$, 则 $|b+c| =$

$\sqrt{2}$, 所以 $|a+b+c|^2 = 3 + 2\sqrt{2}\cos \langle a, b+c \rangle$,

故 $|a+b+c|$ 的取值范围是 $(1, \sqrt{5})$.

题组 2

1. D 命题点 ① 向量的数量积、向量的模

【解析】由 $|a+b|=1$, 得 $a^2 + 2a \cdot b + b^2 = 1$ ①,

由 $|a-b|=\sqrt{3}$, 得 $a^2 - 2a \cdot b + b^2 = 3$ ②,

①-②得 $4a \cdot b = -2$, 解得 $a \cdot b = -\frac{1}{2}$, 故选 D.

2. D 命题点 ② 平面向量的坐标运算及垂直

【解析】由于 $a = (1, 1)$, $b = (1, -1)$, 则 $a + \lambda b = (1, 1) + (\lambda,$
 $-\lambda) = (1+\lambda, 1-\lambda)$, $a + \mu b = (1, 1) + \mu(1, -1) = (1+\mu, 1-\mu)$.

又 $\because (a + \lambda b) \perp (a + \mu b)$, $\therefore (a + \lambda b) \cdot (a + \mu b) = 0$, 即 $(1+\lambda) \cdot$
 $(1+\mu) + (1-\lambda)(1-\mu) = 0$, 解得 $\lambda\mu = -1$, 故选 D.

一题多解 $\because a = (1, 1)$, $b = (1, -1)$, $\therefore |a| = |b| = \sqrt{2}$, $a \cdot$
 $b = 0$. $\because (a + \lambda b) \perp (a + \mu b)$, $\therefore (a + \lambda b) \cdot (a + \mu b) = a^2 + (\lambda +$
 $\mu)a \cdot b + \lambda\mu b^2 = 2 + 2\lambda\mu = 0$, 解得 $\lambda\mu = -1$. 故选 D.

3. B 命题点 ③ 平面向量的数量积、向量的模



【解析】因为 $(b-2a) \perp b$, 所以 $b \cdot b - 2a \cdot b = 0$, 即 $b^2 = 2a \cdot b$.

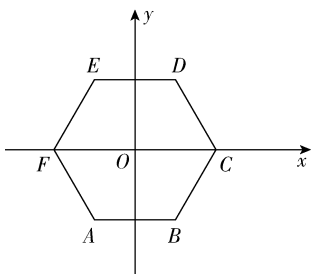
又 $|a+2b| = 2$, 所以 $|a+2b|^2 = (a+2b)^2 = a^2 + 4a \cdot b + 4b^2 =$

$a^2 + 2b^2 + 4b^2 = 1 + 6|b|^2 = 4$, 解得 $|b|^2 = \frac{1}{2}$, 所以 $|b| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选

B.

4. A 命题点 ①平面向量数量积的取值范围

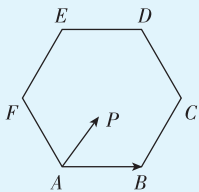
【解析】如图, 以正六边形的中心为坐标原点 O , 线段 FC 所在直线为 x 轴, 线段 FC 的垂直平分线为 y 轴, 建立平面直角坐标系, 则 $F(-2, 0)$, $C(2, 0)$, $A(-1, -\sqrt{3})$, $B(1, -\sqrt{3})$.



设 $P(x, y)$, $x \in (-2, 2)$, 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = (x+1, y+\sqrt{3}) \cdot (2, 0) = 2x+2 \in (-2, 6)$. 故选 A.

一题多解 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos \angle PAB = 2|\overrightarrow{AP}| \cdot$

$\cos \angle PAB$, $|\overrightarrow{AP}| \cdot \cos \angle PAB$ 即为 $\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的投影, 如图, 当 P 与 C, F 分别重合时, $\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的投影最大和最小. 又 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AC}| \cdot$



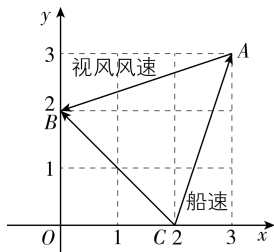
$|\overrightarrow{AB}| \cdot \cos 30^\circ = 6$, $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AF}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos 120^\circ = -2$, 且

P 在正六边形 $ABCDEF$ 内部运动, 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} \in (-2, 6)$

(易错: 注意临界值不可取). 故选 A.

5. A 命题点 ①相反向量的概念、向量的线性运算、向量的模的计算

【解析】如图, 设点 $A(3, 3)$, $B(0, 2)$, $C(2, 0)$, 由题意知, 视风风速对应的向量为 $\overrightarrow{AB}$, 船速对应的向量为 $\overrightarrow{CA}$, 因为船行风风速对应的向量与船速对应的向量为相反向量, 所以船行风风速对应的向量为 $\overrightarrow{AC}$, 则真风风速对应的向量为 $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} = (-2, 2)$, $|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, 而 $2\sqrt{2} \in (1.6, 3.3)$, 故该时刻的真风为轻风. 故选 A.



回归教材 此题是人教 A 版必修第二册第 9 页例 2 的变式题, 以船航行为背景考查向量的线性运算.

6. AC 命题点 ①平面向量的数量积、模的坐标表示及两角和的



余弦公式

【解析】对于选项 A, 因为 $\overrightarrow{OP_1} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $\overrightarrow{OP_2} = (\cos \beta, -\sin \beta)$, 所以 $|\overrightarrow{OP_1}| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 1$, $|\overrightarrow{OP_2}| = \sqrt{\cos^2 \beta + (-\sin \beta)^2} = 1$, 则 $|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}|$, 故 A 正确. 对于选项 B, 因为 $\overrightarrow{AP_1} = (\cos \alpha - 1, \sin \alpha)$, $\overrightarrow{AP_2} = (\cos \beta - 1, -\sin \beta)$, 所以 $|\overrightarrow{AP_1}| = \sqrt{(\cos \alpha - 1)^2 + \sin^2 \alpha} = \sqrt{2 - 2\cos \alpha}$, $|\overrightarrow{AP_2}| = \sqrt{(\cos \beta - 1)^2 + (-\sin \beta)^2} = \sqrt{2 - 2\cos \beta}$, 当 $\cos \alpha \neq \cos \beta$ 时, $|\overrightarrow{AP_1}| \neq |\overrightarrow{AP_2}|$, 故 B 错误. 对于选项 C, $\overrightarrow{OA} = (1, 0)$, $\overrightarrow{OP_3} = (\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$, 所以 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_3} = \cos(\alpha + \beta)$, $\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$, 所以 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2}$, 故 C 正确. 对于选项 D, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_1} = \cos \alpha$, $\overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OP_3} = \cos \beta \cos(\alpha + \beta) - \sin \beta \sin(\alpha + \beta) = \cos[\beta + (\alpha + \beta)] = \cos(\alpha + 2\beta)$, 当 $\beta \neq k\pi$ 且 $\beta \neq k\pi - \alpha (k \in \mathbf{Z})$ 时, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_1} \neq \overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OP_3}$, 故 D 错误. 故选 AC.

快解 如图, 由图可知

$|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}| = 1$, 故 A

正确; 当且仅当 $\cos \alpha =$

$\cos \beta$ 时, $|\overrightarrow{AP_1}| = |\overrightarrow{AP_2}|$

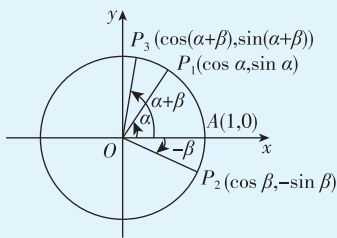
成立, 故 B 错误; 因为

$\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP_3} \rangle = \alpha + \beta$, $\langle \overrightarrow{OP_1},$

$\overrightarrow{OP_2} \rangle = \alpha + \beta$, 且 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OP_3}| = |\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}|$, 故 C 正确; $\langle \overrightarrow{OA},$

$\overrightarrow{OP_1} \rangle = \alpha$, $\langle \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3} \rangle = \alpha + 2\beta$, 因为 $\cos \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP_1} \rangle$ 与 $\cos \langle \overrightarrow{OP_2},$

$\overrightarrow{OP_3} \rangle$ 不一定相等, 故 D 错误. 故选 AC.



7. $-\frac{10}{3}$ **命题点** ⊙平面向量运算的坐标表示

【解析】 $c = a + kb = (3 + k, 1)$, 因为 $a \perp c$, 所以 $a \cdot c = 3(3 + k) +$

$1 = 0$, 解得 $k = -\frac{10}{3}$.

8. 11 **命题点** ⊙平面向量的数量积运算

【解析】因为 $|a| = 1$, $|b| = 3$, $\cos \langle a, b \rangle = \frac{1}{3}$, 所以 $(2a + b) \cdot b =$

$2a \cdot b + |b|^2 = 2|a| \cdot |b| \cdot \cos \langle a, b \rangle + |b|^2 = 2 \times 1 \times 3 \times \frac{1}{3} + 3^2 =$

11.

9. $-\frac{9}{2}$ **命题点** ⊙平面向量的数量积运算

【解析】由 $a + b + c = 0$, 得 $a = -b - c$, 所以 $a^2 = (-b - c)^2 = b^2 + 2b \cdot$

$c + c^2$, 所以 $1^2 = 2^2 + 2b \cdot c + 2^2$, 解得 $b \cdot c = -\frac{7}{2}$. 由 $a + b + c = 0$,

得 $b = -a - c$, 所以 $b^2 = (-a - c)^2 = a^2 + 2a \cdot c + c^2$, 所以 $2^2 = 1^2 +$

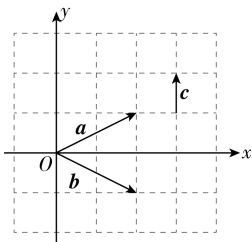


$2a \cdot c + 2^2$, 解得 $a \cdot c = -\frac{1}{2}$, 同理可得 $a \cdot b = -\frac{1}{2}$. 所以 $a \cdot b +$

$$b \cdot c + c \cdot a = -\frac{1}{2} - \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{9}{2}.$$

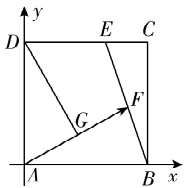
10.0 3 命题点 ①平面向量的数量积的坐标运算

【解析】建立如图所示的平面直角坐标系, 易知 $a = (2, 1)$, $b = (2, -1)$, $c = (0, 1)$, 则 $a + b = (4, 0)$, 所以 $(a + b) \cdot c = 4 \times 0 + 0 \times 1 = 0$; $a \cdot b = 2 \times 2 + 1 \times (-1) = 3$.



11. $\frac{4}{3} - \frac{5}{18}$ 命题点 ②向量的基本定理、向量数量积的最值

【解析】如图, 以 A 为坐标原点, 建立平面直角坐标系, 则 $B(1, 0)$, $D(0, 1)$, $E(\frac{2}{3}, 1)$, $C(1, 1)$, 则 $\overrightarrow{BE} = (-\frac{1}{3}, 1)$, $\overrightarrow{BA} = (-1, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (0, 1)$.



$$\therefore \overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BA} + \mu \overrightarrow{BC}, \therefore \begin{cases} -\frac{1}{3} = -\lambda, \\ 1 = \mu, \end{cases} \therefore \lambda + \mu = \frac{4}{3}.$$

$\therefore$ 点 F 在线段 BE 上, 设 $\overrightarrow{BF} = m \overrightarrow{BE}$ ($0 \leq m \leq 1$), 则 $\overrightarrow{BF} = (-\frac{1}{3}m, m)$, $\therefore \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{BA} = (1 - \frac{1}{3}m, m)$.

$\therefore G$ 为 AF 的中点,

$$\therefore G\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}m, \frac{m}{2}\right), \therefore \overrightarrow{DG} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}m, \frac{m}{2} - 1\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DG} = \left(1 - \frac{1}{3}m\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}m\right) + m\left(\frac{m}{2} - 1\right) = \frac{5}{9}m^2 - \frac{4}{3}m + \frac{1}{2} = \frac{5}{9}\left(m - \frac{6}{5}\right)^2 - \frac{3}{10}.$$

$\therefore 0 \leq m \leq 1$, $\therefore$ 当 $m = 1$ 时, $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DG}$ 取得最小值, 最小值为 $-\frac{5}{18}$.